Il Teorema della Rovina del Giocatore

- De Finetti -

R_A = patrimonio giocatore A

R_B = patrimonio giocatore B

$\tilde{G}_h$ = guadagno (aleatorio) del giocatore A al colpo h-esimo

Se gioco **equo** ($E(\tilde{G}_h) = 0$)

$$\boxed{p_A = \frac{R_B}{R_A + R_B}} \qquad p_B = \frac{R_A}{R_A + R_B}$$

da cui segue che la probabilità di rovina di chi gioca contro un avversario "infinitamente" ricco è pari a 1 (rovina certa):

$$\lim_{R_B \to +\infty} p_A = \lim_{R_B \to +\infty} \frac{R_B}{R_A + R_B} = 1$$

Se gioco <u>non equo</u> - $E(\tilde{G}_h) \neq 0$

$$\boxed{p_A = e^{-\alpha R_A} \cdot \frac{e^{-\alpha R_B} - 1}{e^{-\alpha (R_A + R_B)} - 1}}$$

dove $\alpha \neq 0$ è la soluzione non banale dell'equazione $E(e^{-\alpha \tilde{G}}) = 1$

se $E(\tilde{G}_h) \geq 0 \ \forall h$ $\xRightarrow{\text{allora}}$ $\alpha > 0$
(gioco "favorevole" ad ogni colpo per A)

per cui avviene che al divergere del patrimonio del giocatore B a $+\infty$, allora la probabilità di rovina di A tende a:

$$\lim_{R_B \to +\infty} p_A = e^{-\alpha R_A} < 1$$

da cui si nota che la rovina in questo caso non è certa (< 1), e sarà tanto più contenuta quanto più il gioco è favorevole ad A (α più grande) ed il patrimonio di A è più elevato.

se $E(\tilde{G}_h) \leq 0 \ \forall h \implies \alpha < 0$

(gioco "sfavorevole" ad ogni colpo per A)

allora si avrà:

$$\lim_{R_B \to +\infty} p_A = 1$$

cioè anche in questo caso la rovina del giocatore diviene certa se il giocatore avversario ha un patrimonio infinito.

$\Downarrow$

SOLO SE IL GIOCO NON È EQUO E FAVOREVOLE AL GIOCATORE A EGLI HA UNA PROBABILITÀ DI ROVINA < 1 (ROVINA NON CERTA)

$\Downarrow$

ANALOGAMENTE UNA COMPAGNIA DI ASSICURAZIONI ADOTTA UN CARICAMENTO DI SICUREZZA PER EVITARE LA ROVINA CERTA GIOCANDO CON UN AVVERSARIO (L'INSIEME DEGLI ASSICURATI) INFINITAMENTE RICCO.

Ricordiamo che α rappresenta la soluzione non banale ($\alpha \neq 0$) della relazione:

$$E\left(e^{-\alpha \cdot \tilde{G}_n}\right) = 1$$

Per avere un'idea sul valore di α, anche senza conoscere la distribuzione di probabilità della v.a. guadagno $\tilde{G}_n$ è possibile ricavare un valore approssimato

$$E\left(e^{-\alpha \tilde{G}_n}\right) = 1 \qquad \ln E\left(e^{-\alpha \tilde{G}_n}\right) = 0 \qquad \psi_{\tilde{G}_n}(-\alpha) = 0$$

$$\psi_{\tilde{G}_n}(0) - \alpha \cdot \psi'_{\tilde{G}_n}(0) + \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \psi''_{\tilde{G}_n}(0) \simeq 0$$

$$0 - \alpha \cdot E(\tilde{G}_n) + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \sigma^2(\tilde{G}_n) \simeq 0$$

$$\alpha \left[\frac{\alpha}{2} \cdot \sigma^2(\tilde{G}_n) - E(\tilde{G}_n) \right] \simeq 0$$

$\alpha = 0$
soluzione banale

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{E(\tilde{G}_n)}{\sigma^2(\tilde{G}_n)}}$$

da cui, nel caso di gioco favorevole ad A segue che:

$$\boxed{\lim_{R_B \to +\infty} p_A \simeq e^{-\frac{E(G)}{2\sigma^2(G)} \cdot R_A}}$$

Riportando quanto detto sopra in ambito di una compagnia di assicurazioni, osserviamo che la v.a. guadagno al colpo h-esimo può essere tradotto come l'utile della compagnia generato nell'esercizio h-esimo, che (in condizioni di esclusioni di spese e relativi caricamenti) può essere indicato da:

$$\tilde{G}_h = P_h + \lambda \cdot P_h - \tilde{X}_h$$

con

$$E(\tilde{G}_h) = \lambda \cdot P_h \qquad \sigma^2(\tilde{G}_h) = \sigma^2(\tilde{X}_h)$$

Nel caso in cui le caratteristiche del "gioco" rimangono inalterate sarà trascurabile l'indice temporale h e quindi:

$$\boxed{\lim_{R_B \to +\infty} p_A \simeq e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda P}{\sigma^2_{\tilde{X}}} \cdot R_A}}$$

QUESTO RISULTATO EVIDENZIA L'IMPORTANZA DEL RUOLO DEL CARICAMENTO DI SICUREZZA λ.

Il Teorema del Limite Centrale
(De Moivre - 18° secolo)

Siamo $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots\ldots \tilde{X}_n$

n v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con media μ e varianza σ^2

Consideriamo la v.a. somma seguente:

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$$

allora la distribuzione della v.a. standardizzata

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{S} - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

tende alla Normale standardizzata per $n \to \infty$ qualsiasi sia la distribuzione delle $\tilde{X}_i$:

$$\tilde{T} \underset{n \to \infty}{\sim} \phi(0,1)$$

Per quale valore di n inizia ad essere valida?
Se la distribuzione delle $\tilde{X}_i$ non è molto asimmetrica vale per $n \geq 25$

ATTENZIONE: nei problemi assicurativi spesso ci interessa la coda della distribuzione, e quindi va fatta molta attenzione al facile utilizzo di questo Teorema.